

Habt ihr schon gewusst 278 ... Flüssigkeitsbehälter

... in der Physikolympiade findet man folgende Aufgabe:

Ein rotationssymmetrisches Gefäß läuft unten in eine feine Öffnung mit dem Querschnitt $A = 12 \text{ mm}^2$ aus.

Solche Gefäße wurden in der Vergangenheit, als es noch keine mechanischen oder elektronischen Uhren gab, als „Uhr“ verwendet.

[01] Welche Form muss das Gefäß (die Randkurve) haben, wenn man will, dass der Flüssigkeitsspiegel mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 0,1 \text{ mm/s}$ absinkt?

[02] Welchen maximalen Radius muss diese „Uhr“ haben, wenn sie eine Stunde lang laufen soll?

Lösungsidee

Wenn die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v ausströmt, liefert die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_0^2 + \rho \cdot g \cdot z = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$$

Es gilt zudem die Kontinuitätsgleichung

$$A \cdot v = \pi \cdot r^2 \cdot v_0$$

Aus diesem Ansatz ergibt sich:

$$z(r) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \left[\frac{\pi^2}{A^2} \cdot r^4 - 1 \right]$$

Soll die Uhr $t=24$ Stunde laufen, dann muss die Höhe des Gefäßes $z = v_0 \cdot t$ sein.

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, ergibt sich: $r = \sqrt[4]{\frac{A^2}{\pi^2} \left[\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_0} + 1 \right]}$... ↪ TR